

## Métamatériaux

Les métamatériaux sont des matériaux qui sont structurés de telle manière que certaines échelles soient plus petites que les longueurs d'onde de la lumière avec lesquels ils interagissent et qui possèdent des propriétés optiques (propriétés effectives) remarquables (permittivité, perméabilité, conductivité, etc...exotiques)

## Obtention des propriétés effectives

Elle se fait par l'intermédiaire d'une théorie du milieu effectif. La plupart des théories s'obtiennent en faisant le passage à la limite ( $\omega \rightarrow 0$  ou bien  $\lambda \rightarrow +\infty$ ). Dans notre cas, la longueur d'onde est supposée fixe et une échelle (au moins) de longueur de l'objet diffractant tend vers zéro, en l'occurrence, ici, la période  $d_\eta$  (cf. Fig 1). Cela a pour avantage de pouvoir garder certaines caractéristiques géométriques finies par rapport à ladite longueur d'onde  $\lambda$ , en l'occurrence la longueur  $L$  des fils.

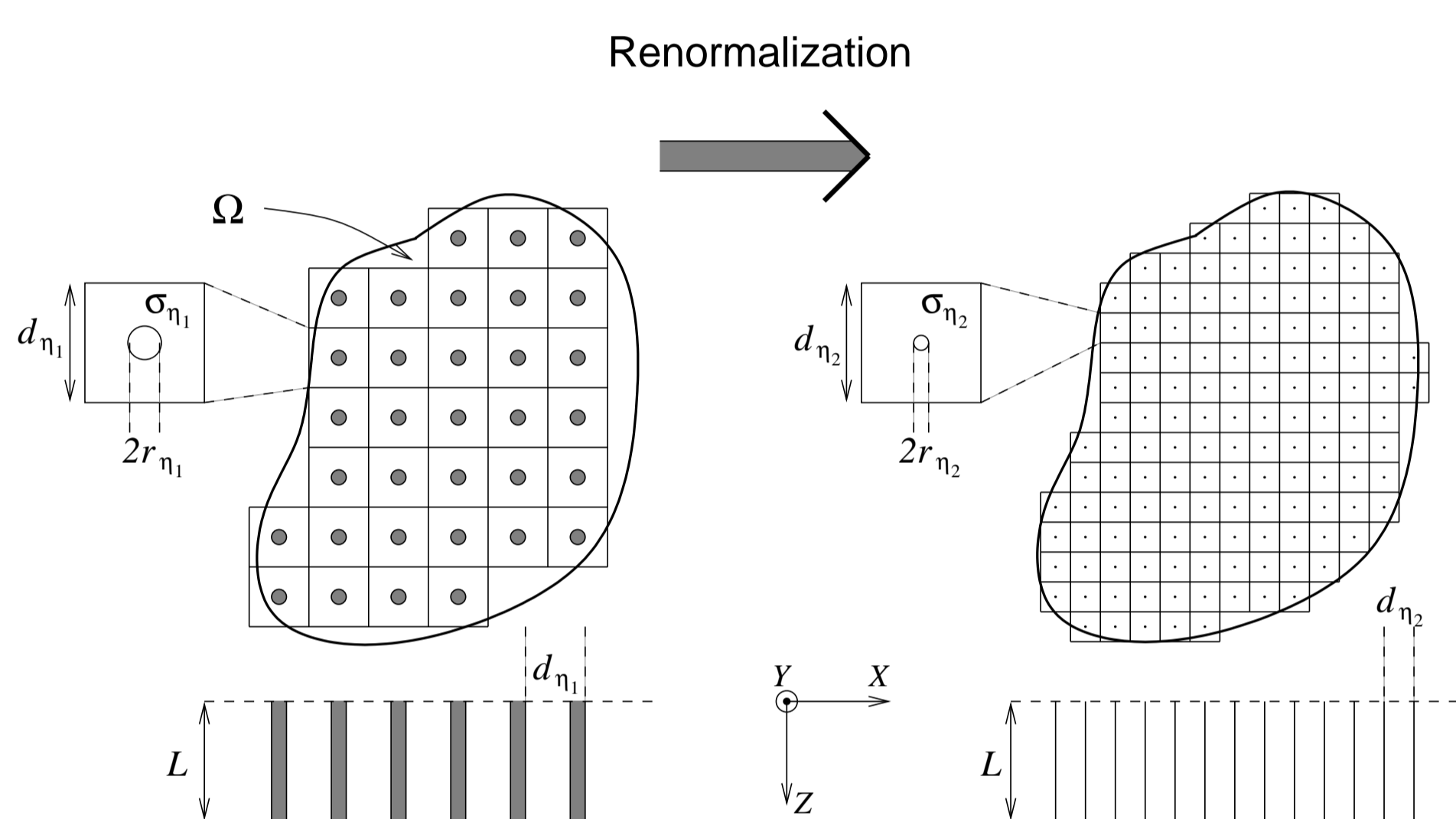


Figure 1: Géométrie et processus de renormalisation.

Dans cette étude, il s'agit d'étudier des réseaux de fils à très fort contraste (forte conductivité, par exemple). Pour mettre en exergue les propriétés les moins triviales, il faut alors mettre en scène une deuxième petite échelle, la section des tiges. Ce procédé s'appelle la théorie à deux-échelles du milieu effectif [1].

## Tapis de fakir ...

La structure étudiée est un réseau bipériodique carré, de période  $d$ , de fils fins de longueur  $L$ , de rayon  $r$  et de conductivité  $\sigma$ . La renormalisation (schématisée à la figure 1) met en jeu un processus à trois paramètres  $r$ ,  $d$  and  $1/\sigma$  qui tendent simultanément vers zéro. Le petit paramètre fondamental dans le processus limite est noté  $\eta = d_\eta/d$  qui est le rapport de la période renormalisée par la période réelle. Les deux autres paramètres asymptotiques sont  $\sigma_\eta$  et  $r_\eta$  et sont tels que les paramètres  $\kappa$  et  $\gamma$  définis par

$$\kappa = \frac{\pi r_\eta^2 \sigma_\eta}{\varepsilon_0 \omega d_\eta^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \eta^2 \log\left(\frac{r_\eta}{d_\eta}\right) \quad (2)$$

ne dépendent pas de  $\eta$ . En d'autres termes, la conductivité est renormalisée de manière inversement proportionnelle au facteur de remplissage (et de ce fait tend donc vers l'infini) cependant que ledit taux de remplissage tend exponentiellement vers zéro. **On a donc à la limite un réseau à taux de remplissage nul et à fils infiniment conducteurs!**

## ...et non-localités spatiales

À la limite (i.e.  $\eta \rightarrow 0$ ), le champ converge vers la solution de problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + \frac{P_z}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}) \\ \frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2} + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}\right) P_z = -2\pi\gamma\varepsilon_0 E_z, z \in [0, L] \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0, z \in \{0, L\} \end{cases} \quad (3)$$

où  $\mathbf{E}$  représente le champ électrique et  $\mathbf{P}$  le vecteur polarisation électrique. Toutes les quantités écrites ci-dessus sont des grandeurs homogénéisées. La troisième égalité montre que le matériau homogénéisé se comporte comme un matériau non-local spatialement et ultra-anisotrope :

$$\mathbf{P}(x, z_0) = \varepsilon_0 \int_0^L \underline{\chi}(x, z) \mathbf{E} dz \quad (4)$$

où

$$\underline{\chi}(x, z) = i\pi\gamma \frac{\exp iK|z - z_0|}{K} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}} \quad (5)$$

avec  $K^2 = k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}$ . Ce matériau est **non-local** car le vecteur  $\mathbf{P}$  en un point  $z_0$  dépend du champ électrique en d'autres points que le point  $z_0$ . Il est **ultra-anisotrope** car le vecteur  $\mathbf{P}$  est assujéti à être suivant  $\hat{\mathbf{z}}$ .

## Tapis de fakir infiniment étendue.

Dans le cas où l'on affaire à un tapis de fakir infiniment étendu, le problème (3) se résout à la main. On cherche des solutions sous la forme

$$\begin{aligned} H_y &= u(z)e^{i\alpha x} \\ P_z &= p(z)e^{i\alpha x} \end{aligned}$$

avec  $\alpha = k_0 \sin \theta$  ( $\theta$  angle d'incidence). Le système (3) se réduit alors à chercher  $u$  et  $p$  telles que :

$$\begin{cases} u''(z) + (k_0^2 - \alpha^2) u(z) = \alpha\omega p(z) \\ p''(z) + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa} - 2\pi\gamma\right) p(z) = \frac{2\pi\alpha\gamma}{\omega} u(z), z \in [0, L] \end{cases} \quad (6)$$

avec les conditions  $p' = 0$  aux points  $z = 0$  et  $z = L$ , et  $u$  et  $u'$  continues partout.

La solution de ce problème se déduit de la matrice  $2 \times 2$  de transfert :  $T$ . À partir de cette matrice, **il est facile de trouver une perméabilité et une permittivité effectives**. Ces caractéristiques optiques dépendent sensiblement de l'angle d'incidence.

## Résolution numérique du tapis de fakir

La résolution numérique du problème à  $\eta$  fixe est un problème difficile, car à la fois tridimensionnel et vectoriel. Ce problème a été résolu avec une méthode de type éléments finis en champ diffracté en imposant des conditions de Bloch sur les traces tangentiels des champs sur les faces latérales et en utilisant des PML pour simuler les conditions d'ondes sortantes [2]. Quant aux fils extrêmement fins, on a utilisé un modèle d'impédance linéique équivalente [3].

## Solution analytique vs. FEM

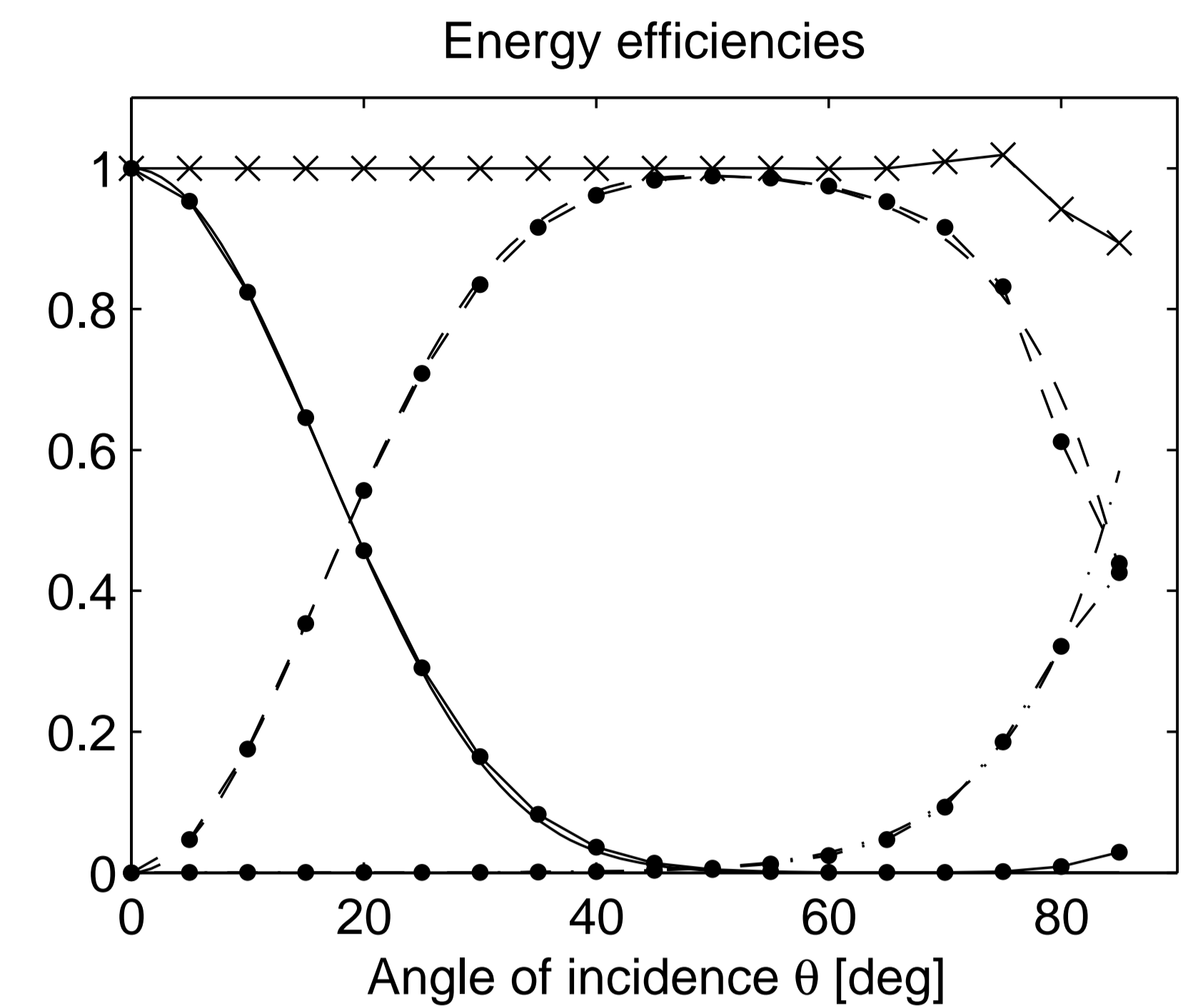


Figure 2: Efficacité en fonction de l'angle d'incidence.

Les transmission (—), réflexion (---) et absorption (---) issues du calcul 3D sont données en fonction de l'angle d'incidence. La conductivité des fils est ici celle des fibres de carbone Toray T300® [4] pour lesquelles  $\sigma = 5.89 \cdot 10^4 (\Omega m)^{-1}$ . La structure a une période de  $d = 0.01m$ , et les paramètres adimensionnés sont les suivants :  $L/d = 80$ ,  $\lambda/d = 20$ ,  $r/d = 3.5 \cdot 10^{-4}$  et  $\delta/r = 15$ . Un bilan d'énergie pour évaluer la précision de la solution fournie par les éléments finis est représenté par les signes  $\times$ . Ce bilan est calculé à mieux que un pour cent tant que l'angle d'incidence est inférieur à  $80^\circ$ . Au delà de cet angle, les performances d'absorption des PML sont à mettre en cause.

## Des matériaux encore plus exotiques

Il s'agit de reprendre la théorie déjà faite dans le cas de la figure en haut à gauche (une connexion suivant l'axe  $Oz$ ) pour les matériaux décrits dans les trois autres figures (deux connexions, trois connexions, aucune connexion mais matériaux non simplement connexes).

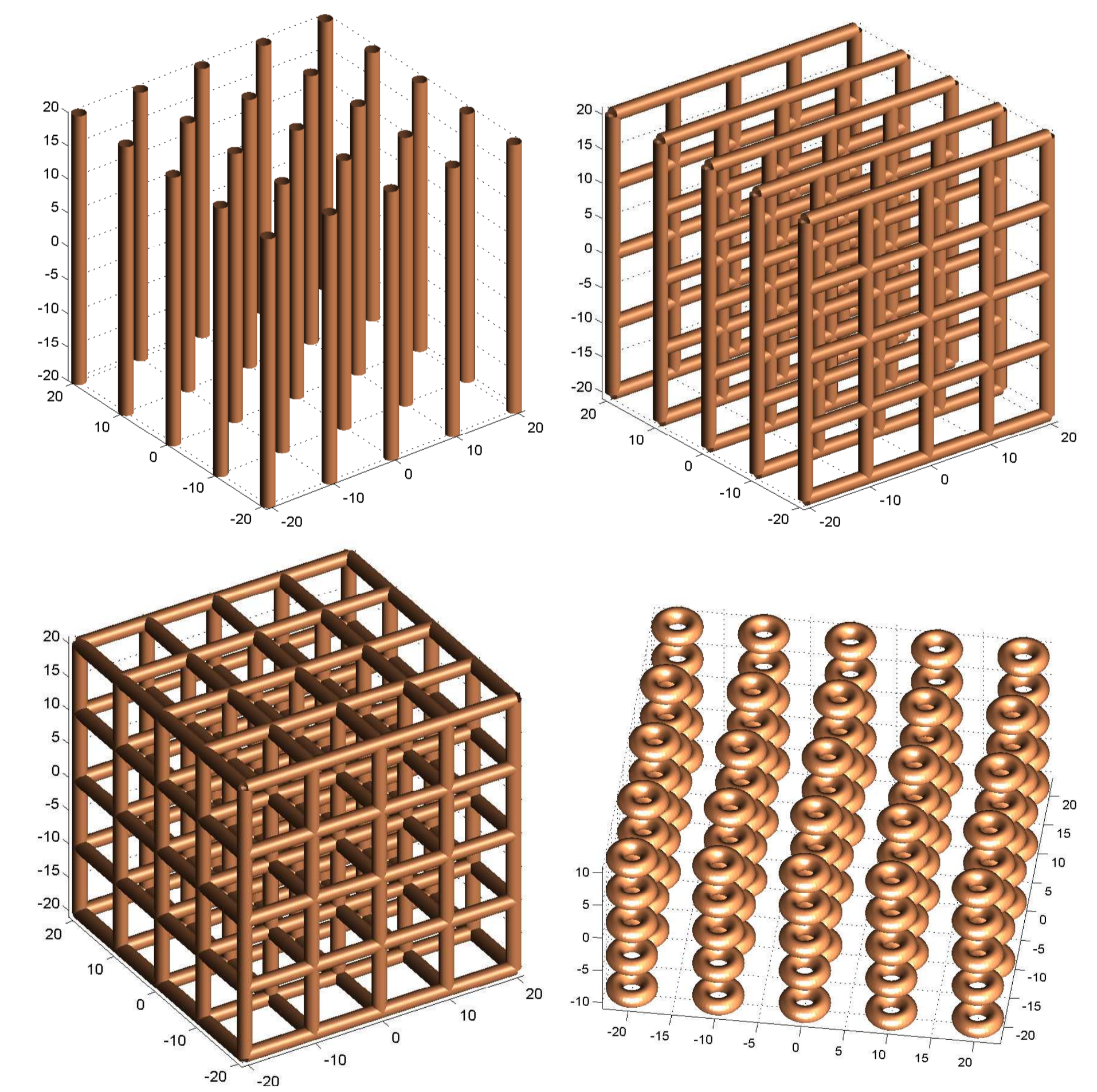


Figure 3: Matériaux exotiques à l'essai.

## Références

- [1] G. Bouchitté and D. Felbacq., *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**, 2061 (2006).
- [2] G. Demésy, F. Zolla, A. Nicolet, M. Commandré and C. Fossati., *Opt. Express*, **15**, 18089 (2007).
- [3] W. Carpes Jr., L. Pichon and A. Razek., *IEEE Trans. Electromag. Compat.*, **44**, 470 (2002).
- [4] Toray Carbon Fiber America Inc., <http://www.toraycfa.com/>.